

REPRESENTATION IN MATHEMATICS EDUCATION

ALGUNOS PUNTOS DE VISTA SOBRE LAS REPRESENTACIONES EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

VICENÇ FONT vfont@d5.ub.es

Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona

ABSTRACT

This work presents a synthesis of different views about the notion of representation in the fields of epistemology, cognitive sciences and mathematics education. These views are analysed and confronted with the purpose of elaborating a theoretical proposal on the topic that seeks to keep in mind the epistemological, cognitive and instructional aspects involved in the teaching and learning of mathematical processes. It is structured in two parts. In the first part, the following issues are discussed: 1) The controversy concerning representationalism versus non-representationalism, 2) The concept of intersubjectivity as the basis for non-representationalist positions, and 3) The representationalist view in cognitive psychology.

In the second part we carry out a non exhaustive survey of different views formulated from the point of view of mathematics education. We begin with those that have been proposed by researchers in the area of Advanced Mathematical Thinking: concept definition and concept image (Dubinsky; Sfard and Tall). We go on to review more general points of view (Dörfler; Duval; Kaput; Brown) and anthropological theory and semiotic functions. The work concludes with some reflections.

1. REPRESENTACIONALISMO VERSUS NO-REPRESENTACIONALISMO

La problemática de la representación se puede plantear a diferentes niveles. Por ejemplo, podemos intentar explicar como las teorías científicas sirven para representar parcelas de la experiencia humana y, más en concreto, el papel que juegan las matemáticas para posibilitar esta representación. Ahora bien, en la didáctica de las matemáticas, no se suelen realizar investigaciones de este tipo, sino que mayoritariamente encontramos investigaciones que estudian las representaciones mentales de los alumnos sobre determinados conceptos matemáticos. Estos estudios se plantean la problemática de un sujeto que se representa un objeto matemático y no suelen explicitar el punto de vista epistemológico desde el que se desarrolla la investigación, que mayoritariamente es un punto de vista realista-representacionalista. Por este motivo empezaremos comentando la controversia representacionalismo versus no-representacionalismo.

Los conceptos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos. Estos signos con soporte material forman parte del mundo real; por tanto, la

representación mental de estos signos matemáticos se puede considerar como un caso particular de la representación mental de los objetos del mundo real. Con relación a la representación mental del mundo real, existen básicamente dos alternativas: la “representacional” y la “no-representacional”. El representacionalismo parte de los siguientes supuestos: 1) Existe un mundo exterior predefinido 2) Nuestra cognición aprehende este mundo, aunque sea en forma parcial; y 3) La manera de conocer este mundo predefinido es representarnos los rasgos más característicos y después actuar sobre la base de dichas representaciones. Estos supuestos epistemológicos del representacionalismo parten de las dualidades interno/externo y realidad/mente, ya que consideran dos mundos diferentes: el mundo real de los objetos exteriores al sujeto y el mundo mental del sujeto. Dicho de otra manera: presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales, y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas. Por representacionalismo entenderemos toda concepción de los contenidos inmanentes¹ que los cree, en principio, compatibles con la posibilidad de ser, al menos en ciertos casos, los representantes mentales homeomórficos de las cosas trascendentes.

El término “no-representacional” puede tener significados muy diferentes. Aquí lo utilizaremos en sentido amplio, ya que con él nos referiremos a todos los puntos de vista que cuestionan el representacionalismo. Este cuestionamiento puede ir desde: 1) La negación de todo ser trascendente respecto de los contenidos inmanentes de la conciencia, 2) O bien, atenuadamente, el agnosticismo teórico sobre esta trascendencia, 3) O más atenuadamente aún, el agnosticismo sobre la posibilidad que los contenidos inmanentes de la conciencia sean homeomórficos a objetos trascendentes, sin poner en duda la existencia del mundo trascendente.

El representacionalismo se suele relacionar con la metáfora del espejo, y el no-representacionalismo con la de la construcción. En la metáfora del espejo se supone que existe una serie de objetos del mundo real que se reflejan en la mente de las personas, mientras que la metáfora de la construcción considera que las personas construimos y modelamos nuestro mundo de experiencias conjuntamente con las otras personas. En la metáfora del espejo, las categorías del mundo real se reflejan en la mente, mientras que en la metáfora de la construcción se considera que nuestro mundo de experiencias no está categorizado de antemano por “la realidad” sino que se categoriza de una forma u otra a medida que las personas hablan, escriben y discuten sobre él.

La representación no puede estudiarse separadamente de la significación. Esta última se suele considerar como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos directas y una indirecta. El triángulo de Ogden y Richards (1923) ilustra estas relaciones (figura1) Figura 1

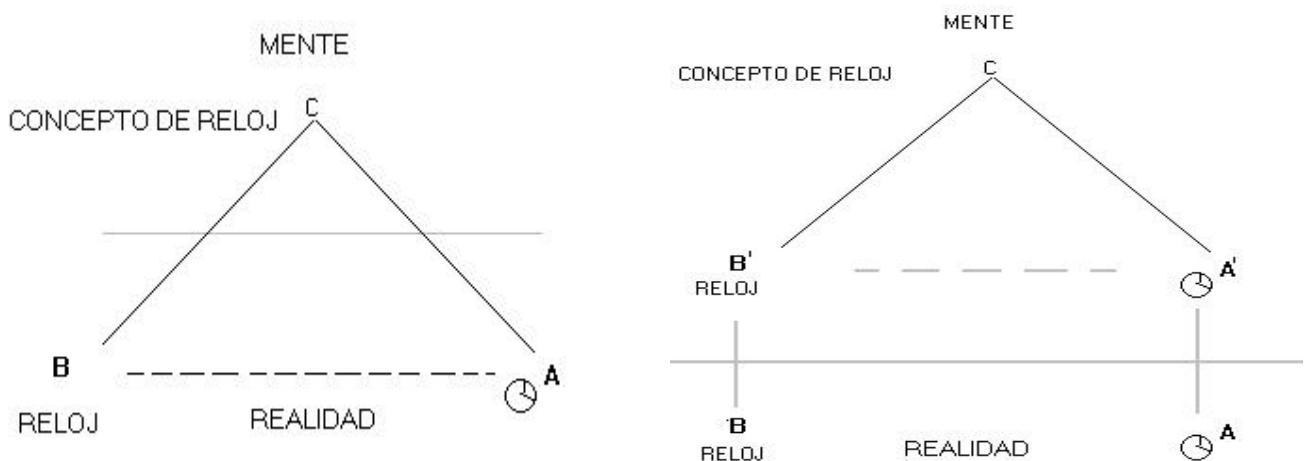


Figura 2 En este triángulo se considera que el objeto $\cong (A)$ es el “referente” (significatum), la palabra escrita (acústica) reloj (B) el “significante” (signo o símbolo) y el concepto de reloj (C) el “significado” (referencia). La relación entre B y A es indirecta por medio del concepto. Si consideramos que existe un concepto matemático A en algún mundo platónico, el concepto A sería el referente, B el significante matemático y C el concepto matemático individual del sujeto. De momento, tomaremos como referente una clase general de objetos que se pueden considerar exteriores al sujeto y pertenecientes al mundo de las cosas reales, como por ejemplo la clase de los relojes. De esta manera esquivaremos, de momento, el problema de la existencia de los conceptos matemáticos. Este análisis ternario del proceso de significación plantea muchas cuestiones que pueden generar considerables desacuerdos. Por ejemplo: ¿Qué se entiende por significado del concepto C ? ¿Se ha de definir el significante B como una entidad física o mental? ¿Cuál es el estatus psicológico u ontológico del concepto C ? ¿El referente A , es un referente particular, es una clase de objetos, o más bien es un representante prototípico de esta clase? ¿El objeto A genera una imagen mental A' ? ¿Si la genera, qué diferencia hay entre el objeto A y su imagen mental A' ? ¿Qué relación hay entre el concepto C y la imagen mental A' ? etc.

La opción epistemológica “representacionista”, presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas. La opción representacionista presupone que tanto el referente como el significante tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza. A partir de este postulado el triángulo de Ogden y Richards se transforma en el pentágono de la figura 2. En este pentágono B' , A' y C se consideran, en un sentido amplio, representaciones mentales, B se considera una representación externa de A , mientras que A se considera un objeto exterior al sujeto. Desde este punto de vista, la mente se considera como un espejo en el que se reflejan los objetos del mundo exterior, existiendo una relación de tipo especular entre el objeto exterior (B y A) y su representación mental (B' y A'). Para Saussure la línea discontinua que une B' y A' en la figura 2 es una relación indirecta que depende de la combinación de B' y C en la mente del sujeto: *"El signo lingüístico no une una cosa y un nombre, sino un concepto y una imagen acústica (...) Llamamos signo a la combinación del concepto y de la imagen acústica"* (Saussure, 1916, págs 110-111 de la edición usada). En la terminología de Saussure, el par B'/C es el signo, B' el significante y C el significado.

Conviene clarificar los diferentes sentidos que implícitamente estamos dando, de momento, al término representación. Por una parte, estamos considerando la representación como un objeto, mental (B' , A' , C) o real (B); y, por otra parte, la estamos considerando como un proceso de exposición de un cierto objeto con la ayuda de otro objeto, es decir, como una relación entre dos objetos. Esta relación puede darse entre objetos del mismo mundo -por ejemplo cuando consideramos que B representa A (objetos del mundo exterior) o que B' representa A' (objetos mentales) - o entre mundos diferentes, cuando consideramos que A' (objeto mental) representa A (objeto exterior). Estas dos maneras de entender el proceso de representación tienen una carga ontológica muy diferente. La relación entre objetos del mismo mundo (relación horizontal) es una manera débil y bastante admitida de considerar la representación, ya que se refiere a todo aquello que se puede interpretar a propósito de otra cosa. Este es el concepto de representación como “interpretación”, pues nada es a propósito de otra cosa si no la interpreta en cierta manera. La relación entre objetos de mundos diferentes (relación vertical) es una manera mucho más fuerte de entender la representación, ya que presupone una realidad exterior y su correspondiente imagen mental, así como una determinada manera de entender la percepción, el

lenguaje y la cognición. La versión débil de representación (relación entre objetos del mismo mundo) es aceptada tanto por los representacionistas como por los no-representacionistas. Con relación a la versión fuerte (relación homeomórfica entre objetos de mundos diferentes) el no-representacionismo se muestra, como mínimo, agnóstico, mientras que para el realismo representacional es la hipótesis básica.

2 INTERSUBJETIVIDAD

La versión "fuerte" de representación -relación homeomórfica entre objetos de mundos diferentes- es problemática y tiene como trasfondo una reflexión filosófica centrada en la relación sujeto-objeto. La superación de la reflexión focalizada en la relación sujeto-objeto se ha conseguido en la filosofía actual por medio de la "intersubjetividad" cuya irrupción progresiva en la filosofía actual se ha producido a partir de las últimas obras de Husserl (1954), el segundo² Wittgenstein (1953), la fenomenología social (Schutz 1932), la sociología del conocimiento (Berger y Luckmann 1966), la teoría de la acción comunicativa de Habermas (1981), los paradigmas de Kuhn (1962) etc. Podemos decir que la intersubjetividad, tanto para la fenomenología como para la hermenéutica, que tienen sus orígenes en Husserl y Heidegger, como para la filosofía lingüística y la teoría de la ciencia, que tiene sus orígenes en el segundo Wittgenstein, es una noción clave. Pero también lo es para la dialéctica y la filosofía de la práctica, que tiene sus orígenes en el marxismo.

Los puntos de vista filosóficos que tienen como trasfondo el concepto de intersubjetividad entienden las matemáticas como una producción realizada socialmente y no necesitan postular ningún mundo trascendente para explicar la existencia de los objetos matemáticos, ya que puede explicarse la construcción de los objetos matemáticos a partir del mundo de la vida y a partir de la intersubjetividad. Entre los enfoques que ofrecen una visión social de las matemáticas destaca el "constructivismo social". Ernest (1998) explica la actividad matemática a partir del constructivismo social. Este punto de vista filosófico aplicado a las matemáticas se basa en: 1) La lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos (1976) basada en la prueba y la refutación. Aunque no queda suficientemente explícito en las "Pruebas y Refutaciones" de Lakatos (1976) que este autor considere que las matemáticas proceden por negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas en lugar de los resultados, el constructivismo social así lo ha considerado y ha interpretado que Lakatos propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. 2) Los trabajos de Wittgenstein (1953 y 1978). Su crítica al análisis referencial del significado permitió reconocer las bases subjetivas y sociales de la certeza que se obtiene al seguir una regla matemática o lógica, porque la certeza y la necesidad de las matemáticas derivan de la aceptación de unas "reglas de juego" que se encuentran en una "forma de vida" socialmente preexistente. 3) La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. El conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y no como un conocimiento personal, privado o construcción individual ni tampoco como un conocimiento externo, absoluto o trascendente. Dicho de otra manera, no se considera que la intervención constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento lleve a verdades necesarias ni que la objetividad dependa de la adecuación del conocimiento a un mundo trascendente.

4) La interpretación de las matemáticas como algo básicamente conversacional. El constructivismo social entiende las matemáticas como algo básicamente lingüístico, textual y

semiótico, pero inmerso en el mundo social de la interacción humana.

La "intersubjetividad" es el trasfondo filosófico que permite defender posiciones no-representacionistas en relación con los objetos matemáticos. Los puntos de vista no-representacionistas permiten considerar una solución al problema de la existencia de los objetos matemáticos del siguiente tipo: los objetos matemáticos personales de un sujeto serían construcciones mentales (dominio de lo personal) que pueden ser materializadas en sistemas de signos (experiencias materiales de las personas que pertenecen al dominio de lo público) y que, por medio de la intersubjetividad, se presentan objetivamente en el mundo de la vida.

En este trabajo consideraremos como posiciones no-representacionistas en sentido amplio a todas aquellas que postulan un solo mundo de experiencias fenoménicas, aunque lo consideren dividido en diferentes esferas. Desde este punto de vista serían no-representacionistas, por ejemplo, la propuesta de un único mundo formulada por Puig (1997) *"Las matemáticas están, por tanto, en el mismo mundo de fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática."* (Puig 1997, pág. 67). Así como las propuestas del constructivismo radical *"en cambio, los mundos físicos y subjetivos se piensan mejor como dominios diferentes de la experiencia"* (Kaput 1991, pág. 59). O la propuesta fenomenológica de Viggiani-Bicudo (1998) *"Les entidades matemáticas, de acuerdo con el punto de vista fenomenológico, son objetos ideales. Se constituyen por medio de la intuición esencial o eidética. Ahora bien, esta idealidad excede esta esfera y, por medio de la intersubjetividad, se presentan objetivamente en el mundo de la vida, y así se presentan a la conciencia"* (Viggiani-Bicudo, 1998, pág. 481) En cambio, consideramos como realista representacional la propuesta de Vergnaud (1990): *"(...) La solución epistemológica es, en principio, bastante simple: la construcción del conocimiento consiste en la progresiva construcción de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son isomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros."* Vergnaud (1990, pág. 22).

Desde el punto de vista no-representacionista, todos los procesos de representación actúan sobre experiencias de las personas, y por representación se entiende cualquier experiencia, material o mental, X que representa a otra experiencia Y , material o mental (versión débil de la representación). Si consideramos esta versión débil de la representación como un proceso (el verbo representar), se puede considerar una función en la que las antiimágenes (el dominio) pueden ser una experiencia cualquiera de las personas: un objeto material, una palabra, una gráfica, una fórmula o un dibujo escritos en un papel, un texto escrito, etc. (esfera de lo público) o bien cualquier objeto concreto, palabra, gráfica, fórmula, dibujo, texto etc. pensado o imaginado (esfera de lo privado). Igualmente, el recorrido puede estar formado por: una palabra, una gráfica, una fórmula o por dibujos escritos en un papel, un texto escrito (esfera de lo público) o bien por cualquier objeto concreto, palabra, gráfica, fórmula, dibujo, texto etc. pensado o imaginado (esfera de lo privado). Si consideramos la representación como un objeto (el resultado del proceso), éste será una experiencia formada por una expresión que se presenta propiamente a la conciencia y por un contenido, que en muchos casos está presente solamente de manera indirecta. Si la expresión forma parte de la esfera de lo material, hablaremos de representaciones públicas (o externas, si por externa entendemos que forma parte de la esfera de

lo público), mientras que si forma parte de la esfera de lo mental, hablaremos de representaciones privadas (o internas, si por interna entendemos no-pública). El punto de vista que considera la representación como una relación entre experiencias de las personas (físicas o mentales) lo podemos encontrar en la didáctica de las matemáticas en los trabajos de Kaput (1991) y Brown (1996 y 1997).

3 LAS REPRESENTACIONES MENTALES EN LA PSICOLOGÍA COGNITIVA

Mientras que el no-representacionalismo pone entre paréntesis la versión fuerte de la representación (relación homeomórfica entre objetos de mundos diferentes), la ciencia cognitiva postula que la mente opera con representaciones mentales, algunas de las cuales son representaciones homeomórficas de objetos exteriores⁴. De acuerdo con este punto de vista, las personas tendríamos un conjunto (probablemente infinito) de representaciones mentales que se pueden agrupar en tres tipos: 1) Las que la persona considera externas (las representaciones internas que son el resultado de la codificación de estímulos externos), 2) Las propiamente internas y 3) Las representaciones internas que sirven para realizar representaciones consideradas externas (representaciones internas que se pueden descodificar produciendo respuestas en el medio exterior). Los estímulos externos producen las representaciones ostensivas, que son las que consideramos como representaciones externas. En estas representaciones, además de los estímulos externos, influye el marco cognitivo de la persona formado por representaciones propiamente internas. La persona puede combinar representaciones internas con representaciones activadas por estímulos exteriores produciendo así una representación que se puede descodificar produciendo respuestas en el medio exterior, las cuales producen estímulos externos.

Si consideramos la clasificación anterior en un contexto social, tenemos que el primer tipo de representación y el tercer tipo son socialmente compartibles. Por ejemplo, un profesor, siguiendo una representación del tercer tipo, dibuja en la pizarra una tabla de una función y el alumno genera una representación del primer tipo. Cuando decimos que estas representaciones mentales son socialmente compartibles, queremos decir que el profesorado y el alumnado dialogan sobre ellas como si fuesen exteriores. Muchos autores hacen referencia a las representaciones del tipo 1 y 3 como “significante”, y al conjunto de conexiones que el alumno puede establecer con otras representaciones del tipo 2 como “significado”.

A partir de estos supuestos epistemológicos, la psicología cognitiva ha estudiado cuáles son estas representaciones mentales y muy especialmente, como se almacenan en la memoria secundaria (a largo plazo) las representaciones del tipo dos (las propiamente internas). A diferencia del conductismo que, al menos en su versión más radical, era un programa de investigación antimentalista, que se centraba especialmente en el estudio del aprendizaje, mediante teorías basadas en el análisis de los estímulos y las respuestas (representaciones del tipo 1 y 3), la psicología cognitiva, y más concretamente el programa de investigación que recibe el nombre de “procesamiento de la información”, en la medida en que se ocupa del estudio de las representaciones mentales, ha generado “teorías de la memoria” (representaciones del tipo 2). La tesis básica de la psicología cognitiva es que la cognición consiste en la manipulación de representaciones (símbolos que se refieren a algo). Las representaciones de tipo 2 (las propiamente internas) se consideran símbolos con una cierta corporeidad⁵ (palabras pensadas, evocación de objetos, imágenes mentales, etc.), que representan algo. La psicología cognitiva no

dice que si abrimos la cabeza de una persona y le observamos el cerebro encontraremos pequeños símbolos, sino que postula un nivel simbólico para la cognición, aunque acepta que estos símbolos son emergentes de la actividad cerebral. Dicho de otra manera, la psicología cognitiva supone un nivel neurobiológico (1º nivel) del cual emergen los símbolos (2º nivel), los cuales, a su vez, representan algo (3º nivel).

Con relación a los símbolos mentales, los psicólogos cognitivistas mantienen una larga polémica que ha generado una abundante literatura a favor y en contra. En Johnson-Laird (1987), Pylyshyn (1983) y Anderson (1983) se puede encontrar una exposición de esta controversia. Hay psicólogos que creen que en la memoria a largo plazo existen imágenes espaciales, mientras que otros se sitúan en el extremo contrario y niegan que tales imágenes mentales se guarden en la memoria en un formato figurativo diferente del formato proposicional, porque consideran que la imagen no está archivada como tal en la memoria, sino que se produce cuando se recupera y se codifica en formato gráfico, el formato proposicional guardado en la memoria. Esta polémica tiene su raíz en el hecho que la imagen mental es una representación mental del objeto, mientras que las proposiciones son representaciones mentales que nos permiten decir cosas del objeto. El hecho que la imagen mental nos dé un conocimiento “de...” y que las proposiciones nos den un conocimiento “que...” ponen de manifiesto que estamos considerando dos tipos de representaciones distintas, y parece lógico suponer que se almacenan en la memoria en dos formatos diferentes (lingüístico y figurativo). Los psicólogos cognitivos han estudiado de manera más completa la representación proposicional que las imágenes mentales.

El “procesamiento de la información” es un programa de investigación que se basa en la aceptación de la analogía entre el funcionamiento de la mente humana y el funcionamiento de un computador⁶, y se ha centrado, fundamentalmente, en el estudio de la memoria. Concretamente, analiza como se organiza nuestra representación proposicional en la memoria a largo plazo. Para realizar este estudio se han propuesto dos representaciones hipotéticas sobre la manera de organizar en la memoria nuestro conocimiento proposicional: las redes semánticas y la teoría de los esquemas. Las redes semánticas son representaciones hipotéticas de nuestras estructuras de conocimiento que permiten explicar las reglas de uso de los conceptos y las relaciones entre ellas. Por esto son útiles para estudiar al mismo tiempo los procedimientos y sus principios subyacentes. Los nodulos y las relaciones son las partes fundamentales de la red, la cual puede contener muchas afirmaciones, cada una de ellas en la forma nódulo-relación-nódulo. Actualmente se ha pasado de las redes a unidades de conocimiento más extensas: los esquemas, que han tenido una notable aceptación y han sido usados en diversas áreas de investigación, pero el prototipo entre las diversas teorías de los esquemas es la teoría proposicional desarrollada por Norman, Rumelhart y sus colaboradores, la cual permite explicar al mismo tiempo el “saber qué” y el “saber cómo”.

El marco de referencia psicopedagógica de la enseñanza no universitaria del estado español es un conjunto de teorías y explicaciones que, si bien mantienen entre sí discrepancias importantes en numerosos puntos, participan de una serie de principios comunes o, al menos, no contradictorios. Este marco de referencia según Coll (1989) está delimitado por lo que podemos denominar enfoques cognitivos en un sentido amplio: a) La teoría genética de J. Piaget y de sus colaboradores de la Escuela de Ginebra, b) La teoría de la actividad en las formulaciones de Vygotsky, Luria, Leontiev, y en sus desarrollos posteriores (Wertsch, Forman, Cazden, etc.), c) La teoría del aprendizaje verbal significativo de D. Ausubel y su prolongación en la teoría de la

asimilación de R.E. Mayer, d) La teoría del procesamiento de la información (teoría de los esquemas) i e) La teoría de la elaboración de M. A. Merrill y Ch. M. Reigeluth. A partir de estos enfoques, se ha formulado la propuesta constructivista que inspira la enseñanza no universitaria. El constructivismo considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget. Para los psicólogos constructivistas, un esquema es la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad (Coll 1983). Pero ¿cuáles son los elementos que incluyen estos esquemas? Por ejemplo, para Miras (1993) son los siguientes: conceptos, procedimientos, hechos, explicaciones, normas, actitudes y experiencias personales. Si bien no se dice explícitamente que las imágenes mentales y la evocación de experiencias no forman parte de los esquemas, tampoco se hace referencia explícita a ellos como elementos integrantes del esquema.

Si bien a la mayoría de las personas les parece bastante evidente que para contestar ciertas preguntas, especialmente aquellas que implican espacio y tiempo, se ha de usar algún tipo de imagen que tenemos archivada en la memoria, hay pocos estudios sobre el formato en el que se guardan las representaciones visuales en la memoria a largo plazo. Hay psicólogos que creen en la existencia en la memoria a largo plazo de imágenes espaciales que contienen información rica y densa, dispuesta de manera bi- o tridimensional y que puede ser inspeccionada por un mecanismo perceptivo interno que extrae información para ofrecerla al “ojo mental”. En cambio, otros se sitúan en el extremo contrario y niegan que tales imágenes mentales estén guardadas en la memoria en un formato figurativo diferente del formato proposicional, porque consideran que la imagen no está archivada en la memoria a largo plazo como tal, sino que se produce al recuperar, y codificar en formato gráfico, el formato proposicional guardado en la memoria. La polémica no es si existe la capacidad para formar y utilizar imágenes mentales, sino si hay un formato específico de tipo figurativo, diferente del formato proposicional, que sirve para guardar en la memoria a largo plazo las imágenes mentales; así como tampoco se discute la existencia de imágenes mentales en la memoria sensorial inmediata. Dicho en otros términos: la polémica es si existe la “imagen mental cosa” archivada en la memoria a largo plazo como una fotografía o un dibujo y no si existe la función que permite formar imágenes mentales. Otra manera de formular la polémica sería la siguiente: ¿Conviene ampliar el contenido de los esquemas archivados en la memoria a largo plazo con un conjunto de imágenes mentales engarzadas al esquema? O bien ¿Basta considerar que los esquemas de formato proposicional permiten crear imágenes mentales, y también recordar experiencias en formato espacial y no sólo descripciones verbales de estas experiencias?

Si bien la mayoría de las personas cree que tiene imágenes mentales, es difícil decir con exactitud qué son. Consideremos el caso de la imagen mental de triángulo. Podemos distinguir un primer nivel que es el dibujo de un triángulo en un libro que estamos mirando. Un segundo nivel es el recuerdo del dibujo del triángulo que hemos visto anteriormente en una página de un libro. En este caso creo que puedo ver el triángulo y estoy seguro, por ejemplo, que es rectángulo. Un tercer nivel sería considerar la imagen de un triángulo que no sea el recuerdo directo de una experiencia anterior, es decir que intentemos imaginar un triángulo en una hoja en blanco. En este caso la imagen ha de ser la de un triángulo concreto, por ejemplo con base horizontal. Un cuarto nivel sería la posibilidad de tener la imagen mental de un triángulo general, una especie de imagen-plantilla que sirviese para cualquier triángulo, es decir, una especie de clase de equivalencia de todas las figuras del nivel anterior. Es evidente que el primer nivel, la

percepción directa de un triángulo no es lo que normalmente se entiende por imagen mental, mientras que el cuarto nivel resulta difícil de diferenciar del concepto de triángulo y de la capacidad para determinar qué figura es o no es un triángulo. Por lo tanto, los ejemplos paradigmáticos de imágenes mentales de triángulo son el nivel dos y tres, mientras que el primer y el cuarto estarían en la frontera de lo que se puede considerar una imagen mental. El primero porque, al ser un percepto, se puede considerar como la “cosa en mi” que, al ser inmanente, se podría llamar imagen, y el cuarto porque resulta difícil de diferenciar del concepto de triángulo. Por lo tanto, si nos limitamos a los ejemplos paradigmáticos (niveles 2 y 3), no podemos hablar con propiedad de la imagen mental de triángulo sino de un conjunto de imágenes mentales de triángulos: rectángulos, escalenos, de base horizontal, equiláteros, etc. relacionadas entre sí.

La psicología cognitiva utiliza básicamente tres criterios para decidirse por una de las dos opciones siguientes: 1) La información se almacena en la memoria a largo plazo en formato proposicional y 2) Existe un código de representación en la memoria a largo plazo de tipo dual, que implica representaciones de tipo gráfico, juntamente con otras en formato proposicional, en igualdad de condiciones. El primer criterio es que el constructo teórico ha de servir para explicar las entradas y salidas de la facultad cognitiva estudiada, es decir, ha de explicar las conductas de las personas. Este primer criterio es demasiado tosco para inclinarnos a favor de alguna de las dos opciones anteriores, porque ambas explican la función imaginativa de las personas. El segundo, exige que los constructos sean coherentes con las capacidades del sistema nervioso del individuo, pero no es muy útil en este caso porque el sistema nervioso tiene la capacidad de formar conceptos e imágenes. El tercer criterio es un refinamiento del primero; consiste en considerar que si dos constructos explican la misma conducta, pero uno la explica, por ejemplo, con dos procedimientos, y el otro solamente con uno, podemos esperar que en igualdad de todas las otras condiciones, los dos procedimientos tarden más en dar una respuesta. Por lo tanto, un estudio de los tiempos que tardan las personas en responder nos permitirá decidimos por uno de los dos constructos. Los estudios experimentales basados en el tercer criterio no permiten decidirse claramente por ninguna de las dos alternativas anteriores, por lo que la discusión sobre el formato en el que se archiva en la memoria a largo plazo la información, continúa abierta entre los psicólogos cognitivos. Por lo tanto, en principio se pueden formular, como mínimo, dos propuestas de esquema diferentes. La primera corresponde a aquellos que consideran que un esquema contiene: conceptos, procedimientos, hechos, explicaciones, normas, actitudes y experiencias personales en formato proposicional y se abstienen de considerar que el esquema incorpore imágenes mentales o recuerdos en formato visual. La segunda, corresponde a aquellos que postulan que los esquemas, además de conceptos, procedimientos, hechos, explicaciones, normas, actitudes y experiencias personales, contienen imágenes mentales y recuerdos en formato gráfico. Podríamos decir que la primera opción peca de prudente, y la segunda de atrevida, al postular la existencia de imágenes mentales en la memoria a largo plazo.

Actualmente el papel que juegan las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos ha sido objeto de estudio por parte de investigadores procedentes tanto del campo de la psicología como del campo de la didáctica de las matemáticas (Bishop 1996; Bosch 1994; Castro y Castro 1997; Davis 1993; Dreyfus 1994; Fischbein 1993; Gorgorió y Jones 1997; Gray y Tall 1994; Guzmán 1996; Presmeg 1986 y 1999; Tall 1996 y 1998; Zimmermann y Cunningham 1991). Estos estudios se han realizado desde marcos teóricos diferentes y en algunos casos enfrentados.

4 LAS REPRESENTACIONES EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Hasta ahora hemos utilizado el término “representación” con dos sentidos diferentes. Por una parte hemos considerado la representación como un objeto y, por otra, como una relación. También hemos visto, en la controversia representacionalismo versus no-representacionalismo, como esta relación se puede entender de diferentes maneras, desde una relación homeomórfica entre objetos de dos mundos diferentes (versión fuerte) hasta una relación entre objetos del mismo mundo (versión débil). A continuación analizaremos diferentes maneras de entender las representaciones en la didáctica de las matemáticas.

Para la psicología cognitiva, la cognición consiste en la manipulación mental de representaciones (símbolos que se refieren a “algo”). Los símbolos mentales se consideran con una cierta corporeidad (palabras pensadas, evocación de objetos, etc.). Los objetos representados por los símbolos mentales pueden ser objetos no-ostensivos (conceptos, ideas, etc.) y objetos ostensivos (con soporte material, intersubjetivos en el sentido que se pueden mostrar a otro). Los objetos ostensivos que forman parte de las experiencias materiales de las personas, de acuerdo con el punto de vista realista representacionalista, se consideran perceptos (representaciones personales de objetos reales exteriores al sujeto). Los no-ostensivos se consideran como objetos personales del sujeto. En el proceso de instrucción se pretende que estos no-ostensivos personales se correspondan con unos no-ostensivos objetivos, lo cual plantea el problema de la naturaleza de estos no-ostensivos objetivos, ya que si no tenemos una idea clara de lo que son los objetos matemáticos, difícilmente podremos evaluar si una persona los ha aprendido. Con relación a la naturaleza de estos no-ostensivos objetivos hay básicamente dos posiciones: 1) Considerarlos objetos con una existencia independiente de las personas y 2) Considerarlos objetos institucionales, que son el resultado de una construcción social. En el primer grupo incluimos tanto el platonismo como el Mundo 3 de Popper (1972), el cual consiste en admitir la existencia de un conocimiento sin sujeto cognoscente. En el segundo grupo, los no-ostensivos objetivos son considerados emergentes de las prácticas realizadas en una institución.

Estas diferentes clases de objetos se pueden dividir en dos mundos: 1) El de las experiencias posibles de las personas donde se sitúan los ostensivos, los símbolos mentales, los objetos no ostensivos personales y los institucionales que de ellos emergen, y 2) El mundo objetivo hipotético donde hay que situar los objetos reales y los no-ostensivos objetivos que existen con independencia de las personas. Cada uno de estos dos mundos se puede dividir en dos esferas. El mundo de las experiencias del sujeto se puede dividir en la esfera de lo material y la de lo mental, mientras que el mundo objetivo se puede dividir en realidad e ideas platónicas (conocimiento objetivo). Según cual de estas esferas eliminemos, según cual enfatecemos y según como las combinemos, tendremos opciones epistemológicas muy diferentes. Estos dos mundos y las diferentes esferas se pueden ilustrar con el siguiente esquema:

1	objetos reales
2	experiencias materiales de las personas (ostensivos)
3	símbolos mentales
4	no-ostensivos personales

5	no-ostensivos institucionales que emergen a partir de los no-ostensivos personales
6	objetos platónicos

Figura 3

En la mayoría de investigaciones sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas no se distingue entre los niveles 1 y 2, y se considera que los objetos ostensivos (nivel 2) son las representaciones externas y también se considera que los niveles 3 y 4 son las representaciones internas. Las representaciones externas podemos clasificarlas en dos grandes grupos: las digitales, discretas, de carácter alfanumérico, la sintaxis de las cuales viene descrita por una serie de reglas de procedimiento, y las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo, la sintaxis de las cuales viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. Según cómo nos posicionemos en la polémica que mantienen los psicólogos cognitivos con relación al tipo de formato en que son archivadas las representaciones internas en la memoria a largo plazo, la clasificación anterior se puede ampliar a estas últimas.

Muchas investigaciones han tenido (y tienen) por objetivo el estudio de estas representaciones internas porque consideran que la comprensión de los alumnos está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de representaciones externas. Aunque el objetivo de las investigaciones sean las representaciones mentales de los alumnos, estas no se pueden considerar separadamente de las representaciones externas, ya que los dos tipos de representaciones se influyen mutuamente en la actividad de cognición. Algunas de estas investigaciones solamente hacen un análisis sincrónico de las representaciones mentales de los alumnos; otras más interesantes llegan a estudiar la evolución diacrónica de las representaciones mentales de los alumnos como consecuencia de la instrucción.

En el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término “representación” y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos (Brown 1996 y 1997; Kaput 1987, 1991 y 1992; Janvier 1987; Duval 1995; Romero y Rico 1999). La mayoría están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas influye en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar. La terminología que normalmente se usa en este tipo de investigación proviene de la lingüística, de la fenomenología y de la semiótica. En la terminología que ha generado la lingüística, las representaciones serían los significantes que están en lugar de los significados, es decir, los sistemas matemáticos de signos que se utilizan para representar los contenidos matemáticos. En semiótica se utilizan los términos “expresión” y “contenido” de un signo (o función semiótica). Cuando una persona interpreta o comprende un signo, actúa el par expresión/contenido, o sea, la expresión remite a un contenido. La función semiótica se puede considerar una función que a una expresión le hace corresponder un contenido.

4.1 Definición e imagen conceptual

Mientras los psicólogos cognitivos discutían cuáles eran los elementos contenidos en los esquemas archivados en la memoria a largo plazo, dentro del campo del pensamiento matemático

avanzado se formuló una propuesta de esquema que tiene unas características propias. Vinner (1991) considera que cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, algo es evocado en nuestra memoria. Aquello que evocamos no es la definición del concepto sino aquello que él y Tall llaman "concept image" (Tall y Vinner 1981). Vinner considera que <<El "concept image" es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. Aparecen en una fase posterior. Por ejemplo, cuando escuchamos la palabra "mesa", una figura de una cierta mesa puede evocarse en nuestra mente....Cuando escuchas la palabra "función", por otra parte, puedes evocar la expresión " $y = f(x)$ ", puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como $y = x^2$ o $y = \sin x$, $y = \ln x$, etc.>> (Vinner 1991, pág 68). Vinner postula la existencia de dos celdas diferentes en nuestra estructura cognitiva. Una celda es para la definición del concepto y la otra es para la imagen conceptual. Puede haber alguna interacción entre las dos celdas, aunque también se pueden formar de manera independiente.

Vinner considera que a la definición del libro le corresponde una definición personal, mientras que los ejemplos y símbolos del libro generan sus imágenes mentales respectivas. Estas imágenes mentales son consideradas los elementos que forman la imagen conceptual, juntamente con todas las propiedades y procedimientos que caracterizan el concepto (Tall y Vinner 1981). Otra característica es que Vinner (1991) considera dos celdas en nuestra memoria, pero no especifica si se refiere a la memoria a largo plazo. La falta de definición sobre este tema y la manera de considerar la relación entre la definición del concepto y la imagen conceptual nos lleva a considerar que Vinner se interesa básicamente por las relaciones entre ellas cuando se activan para realizar alguna tarea. Otra característica es el papel secundario que juega el contexto. Si bien en la propuesta de imagen conceptual de Vinner se tiene en cuenta la importancia del contexto, porque considera que según el contexto se evoca una parte u otra de la imagen conceptual (Vinner 1991 y Tall y Vinner 1981), este no tiene el papel central que le dan otras propuestas.

La propuesta formulada por Vinner y Tall de distinguir entre la imagen conceptual y la definición del concepto ha tenido una fuerte resonancia entre los investigadores sobre el pensamiento matemático avanzado. Durante los años 80 y 90 se han desarrollado muchas investigaciones que han intentado estudiar la estructura de la imagen conceptual de los alumnos (o de los profesores) para diferentes conceptos. Uno de los proyectos que más ha trabajado en esta dirección ha sido el proyecto "Procesos de pensamiento matemático avanzado" desarrollado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las CCEE de la UAB. Las investigaciones del grupo de la UAB (Azcarate (1990, 1992, 1995, 1997), Delgado (1998), Delgado y Azcarate (1996), Moreno y Azcarate (1997) y Romero (1996)) han desarrollado y enriquecido tanto la manera de entender la imagen conceptual y la definición del concepto, que podríamos decir que su propuesta de "concept image" es considerablemente diferente de la propuesta inicial formulada por Vinner (1991). Las diferencias entre las dos propuestas, a nuestro entender, son básicamente las siguientes: 1) La investigación está centrada sobre el "concept image". El "concept definition", considerado como un concepto institucional previo, es

un objeto que no es el foco principal de la investigación, porque aquello que se investiga es la estructura de la imagen conceptual del alumno. 2) El "concept definition" no se considera como una celda en la memoria de las personas diferente de la del "concept image", sino que se considera como el concepto institucional. Cuando se considera la reconstrucción personal de una definición aceptada por la comunidad matemática, ésta es considerada, de hecho, como una parte del "concept image" de la persona. 3) La utilización de la expresión "esquema conceptual" en lugar de la traducción literal "imagen conceptual" es una manera implícita de reconocer que su propuesta, si bien tiene su origen en el "concept image", no es exactamente lo mismo. 4) Una mayor preocupación para clarificar cuáles son los componentes de los esquemas conceptuales. El interés por clarificar la estructura de los esquemas conceptuales y los componentes que proponen, se aproxima mucho a la propuesta de esquema que hace la psicología cognitiva. Además, como lo que interesa son los esquemas en acción, la polémica sobre si existe un formato específico de tipo figurativo, diferente del formato proposicional, que sirve para archivar en la memoria a largo plazo las imágenes mentales, pierde virulencia porque: 1) O bien existe la "imagen mental cosa" archivada en la memoria a largo plazo, 2) O bien la información en formato proposicional archivada en la memoria a largo plazo permite generar la imagen mental como un objeto construido y mantenido brevemente en una amplitud de atención limitada, que es percibida como un producto mental que, si se quiere, se puede proyectar, por ejemplo, sobre una hoja de papel. Es decir, si nos proponemos investigar los esquemas en acción no resulta problemático considerar que las imágenes mentales son uno de los elementos que forman los esquemas. 5) Hay una aceptación implícita de la importancia del contexto como resultado de sus investigaciones. Esto es así porque las investigaciones que ha desarrollado este grupo sobre los esquemas conceptuales de los alumnos determinan sus perfiles, que se pueden considerar como diferentes niveles de campos semánticos personales; es decir, como diferentes niveles en la capacidad de utilizar el concepto en diferentes contextos.

La propuesta de esquema conceptual constituye por una parte un intento de desarrollar la noción de "concept image" en la dirección que propone la psicología cognitiva, y por otra parte, es una propuesta en la que el contexto, al menos implícitamente juega cada vez más un papel más importante.

4.2 El punto de vista de Dubinsky, Sfard y Tall

Las representaciones no se pueden considerar desligadas del proceso de abstracción y, más en general, de los procesos cognitivos movilizados por los contenidos matemáticos. Desde esta perspectiva, en el campo del pensamiento matemático avanzado, se han realizado diferentes investigaciones. Dubinsky (1991 y 1996) ha intentado aplicar, después de una revisión, algunas de las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La principal dificultad que ha encontrado en este intento ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Dubinsky (1996) considera que un problema importante en la educación matemática consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los ordenadores se pueden utilizar para este propósito.

Dubinsky considera que, para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular una hipótesis mentalista, ya que considera que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes: *“El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones”* (Dubinsky, 1996, págs. 32-33). La construcción de acciones, procesos y objetos, la ilustra Dubinsky con la siguiente figura (Dubinsky, 1996, pág. 33):



Figura 4

Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo. Un individuo que solamente puede entender una transformación como una acción solamente puede realizarla reaccionando a indicaciones externas que le proporcionen detalles precisos sobre los pasos que tiene que hacer. Por ejemplo, un estudiante que no es capaz de interpretar una situación como una función, a no ser que tenga una fórmula para obtener valores, está restringido a un concepto de acción de una función. En este caso, el alumno no puede hacer muchas cosas con esta función, excepto evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula. Las funciones definidas a trozos, las inversas de las funciones, la composición de funciones, los conjuntos de funciones, la función derivada, etc. son fuente de grandes dificultades para estos alumnos porque no pueden ir más allá de una concepción de acción de una función, y todas estas nociones exigen concepciones de proceso y/o objeto (Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols 1992).

Cuando una acción se repite y el alumno puede reflexionar sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla, y hasta puede llegar a invertir los pasos. A diferencia de la acción, el individuo percibe el proceso como algo interno y bajo su control, en lugar de ser una respuesta a indicaciones externas. En el caso de las funciones, una concepción de proceso permite al alumno pensar la función como algo que recibe una entrada, o más, de valores de la variable independiente, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que da los valores de la variable dependiente como resultado. Por ejemplo, para entender la función $f(x) = \sin x$, es necesaria una concepción proceso del concepto de

función porque no tenemos instrucciones explícitas de cómo podemos obtener una salida para cada entrada; para hallar imágenes, un alumno ha de pensar en el proceso que asocia a cada número real su seno. Con una concepción proceso del concepto de función, el alumno puede construir una composición o bien invertir el proceso para obtener funciones inversas.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho estas transformaciones, está pensando en este proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el transcurso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular el objeto y volver al proceso del cual se obtuvo a fin de usar sus propiedades y manipularlo. Un ejemplo de desencapsulación y encapsulación de procesos en objetos es la manipulación de funciones para hallar la suma, producto, etc. En general la encapsulación de procesos en objetos es extremadamente difícil.

Sfard (1991) considera que los conceptos matemáticos pueden considerarse de dos maneras diferentes: estructuralmente (como un objeto) y operacionalmente (como un proceso) Para Sfard, el paso de la concepción operacional a la estructural implica tres fases: interiorización, condensación y cosificación. Esta última fase es lo que Dubinsky (1991 y 1996) y otros investigadores llaman encapsulación.

Tall (1996), para explicar el papel de la visualización y la simbolización como herramientas mediadoras en el proceso de abstracción y, más en general, en los procesos cognitivos movilizados por los objetos matemáticos, profundiza y desarrolla los tres tipos de sistemas de representación propuestos por Bruner. Según Bruner, hay tres tipos de representaciones: 1) La enactiva: es una manera de representar experiencias anteriores mediante una respuesta motriz adecuada, 2) La icónica: consiste en recrear mentalmente una situación anterior: por ejemplo, si en un viaje hemos visitado un lugar que nos ha gustado mucho, podemos recrear sus imágenes y 3) La simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos. Tall (1996) adapta la clasificación de Bruner a las representaciones utilizadas en el cálculo infinitesimal de la manera siguiente: 1) "Representaciones enactivas": son acciones humanas que dan la sensación de cambio, velocidad o aceleración, 2) "Representaciones numéricas y simbólicas": son representaciones que puede ser manipuladas manualmente o con computadora (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes), 3) "Representaciones visuales": son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos y 4) "Representaciones formales": son representaciones que dependen de definiciones y pruebas.

Tall considera que las representaciones simbólicas propuestas por Bruner son al mismo tiempo visuales y simbólicas, por lo cual Tall (1998) amplía la clasificación anterior con una nueva categoría: "*Una combinación de 2 y 3 conectando las representaciones simbólicas y gráficas*" (Tall 1998, pág. 68). Tall propone un aprendizaje versátil combinando "gestalts" visuales globales y manipulaciones secuenciales de símbolos, y considera que los símbolos en matemáticas son usados de dos maneras diferentes, como un proceso y como un objeto matemático. Gray y Tall (1994) consideran que los símbolos tienen un gran poder para comprimir información y afirman que ellos son el instrumento utilizado para la encapsulación de "procesos" matemáticos en "objetos". Gray y Tall usan el término "procepto" para

denotar simultáneamente “proceso” y “concepto”. El término procepto se entiende como una amalgama de proceso y concepto, con un símbolo operando dualmente para uno o para el otro. Algunos alumnos ven el simbolismo básicamente como un proceso y otros lo usan de manera flexible como proceso o como concepto, lo cual les da una gran ventaja. Tall (1998) pone ejemplos de tres niveles de proceptos: 1) proceptos tales como $5+4$, los cuales pueden tener un proceso de construcción por computación para producir un resultado. Son proceptos que evocan tanto la operación de sumar como el concepto de suma. 2) proceptos tales como $3a+2b$. Son símbolos manipulables que tienen un proceso de construcción que no puede ser ejecutado hasta que tenga lugar la substitución de valores. Son proceptos que evocan el proceso de evaluación para un valor determinado y el concepto de expresión algébrica. 3) proceptos tales como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, los cuales tienen un proceso asociado (tender al límite), pero no tienen un método de construcción (como parte integral y permanente) para calcular el valor del límite, aunque pueden también evocar el concepto de límite.

4.3 El punto de vista de Dörfler

Dörfler (1991) explica los procesos de abstracción, generalización y simbolización que intervienen en la formación de los conceptos matemáticos de la manera siguiente. El punto de partida es una acción o un “sistema de acciones” que pueden ser materiales (p.e. dibujar un triángulo en la pizarra), imaginadas (p.e. imaginarse mentalmente la acción de dibujar un triángulo en la pizarra) o simbólicas (pensar mentalmente con palabras que hemos de realizar la acción de dibujar un triángulo en la pizarra); estas acciones siempre son concretas, sus elementos son unos determinados objetos (materiales o ideales). El objetivo, el significado y el curso de estas acciones están dirigidos por la atención que pone la persona sobre determinadas relaciones y conexiones entre los elementos de estas acciones. Esto sucede especialmente cuando planificamos las acciones y cuando las evaluamos de manera reflexiva.

Estas relaciones prueban que hay una cierta regularidad cuando las acciones son repetidas (tantas veces como se considere conveniente). Dichas regularidades se llaman “invariantes de las acciones”. Los invariantes de acción que se han observado necesitan, para ser representados, un “sistema de símbolos” que pueden ser verbales, icónicos, algébricos, etc. Estos símbolos solamente sirven para representar los elementos de la acción y en ningún caso se considera su significado en abstracto; es decir, el papel que juegan estos símbolos es el de describir los elementos de la acción. Muchas veces estos símbolos pueden ser substituidos por prototipos que se han utilizado en las acciones, de manera que la persona puede explicar los invariantes de las acciones a partir de un ejemplo prototípico, pero no puede substituirlo por un símbolo. Este proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente recibe el nombre de “proceso de abstracción constructiva”. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. La abstracción constructiva produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y “existencia” a partir de ella.

En la mayoría de los casos, los elementos de la acción, o bien la misma acción, pueden ser

sustituidos por otros elementos sin que ello afecte a los invariantes del sistema de acciones que se ha hallado, ni tampoco a su descripción simbólica. Este hecho determina que los símbolos que se utilizan para representar los invariantes de la acción tengan, de manera gradual, un referente cada vez más amplio. Este proceso recibe el nombre de “generalización extensiva”. La sustitución de elementos de la acción inicialmente se hace por elementos muy similares a los de la situación inicial, pero posteriormente los objetos pueden ser sustituidos por otros objetos sin mucha similitud con los de la situación inicial, con lo que los símbolos son utilizados como variables (presentan la propiedad de poder ser sustituidos por objetos diferentes).

La reflexión que hacemos sobre el sistema de símbolos que describen los invariantes del sistema de acciones hace que ellos mismos se puedan convertir en elementos sobre los cuales actuar. Es decir, los símbolos se convierten en objetos con los que podemos efectuar acciones, de manera que se convierten en representantes (significantes) de los invariantes del sistema de acciones inicial, sobre los cuales a su vez se puede actuar. Podemos hablar de una separación o autonomía de los símbolos respecto de su referente inicial, que permite que los símbolos se conviertan en objetos que tienen significado a partir de la estructura que los organiza y que aparece a partir de las operaciones que sobre ellos podemos hacer. Llegados a este punto, los símbolos se convierten en “variables con carácter de objetos”, es decir, se convierten en símbolos, que tienen un campo de referencia potencialmente ilimitado, organizados en un sistema de signos estructurado. Dicho proceso recibe el nombre de “generalización intensiva” Este sistema estructurado de signos se puede aplicar a otras situaciones diferentes de la inicial, con lo que su referente gana en extensión y volvemos a tener una “generalización extensiva”.

4.4 El punto de vista de Duval

Las investigaciones de Duval (1995) sobre las representaciones, según nuestra opinión se posicionan en el punto de vista representacionista. Duval se formula la pregunta siguiente: ¿Las actividades de aprehensión, conceptualización, razonamiento o comprensión son independientes de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación? y considera que la respuesta afirmativa implica postular primero algún tipo de existencia para los objetos matemáticos, sin confundir de este modo el objeto matemático con su representación. En segundo lugar, implica postular la existencia de representaciones mentales internas y de representaciones semióticas externas, que están subordinadas a las representaciones mentales internas, y de las cuales son una exteriorización a efectos de comunicación. En definitiva, la respuesta afirmativa implica considerar que la semiosis está dirigida por la noesis, entendiendo por semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica y por noesis actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia, etc. Duval no está de acuerdo con que la noesis dirige a la semiosis, sino que es partidario de la hipótesis contraria: *“no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis”* (Duval 1995, pág. 4).

Duval clasifica las representaciones en conscientes y no conscientes. Por conscientes, entiende aquellas en las que aparece “algo”, y por no conscientes, las que se escapan completamente a la percepción del sujeto. A continuación clasifica las representaciones en internas y externas, entendiendo por externas aquellas que son visibles y observables públicamente, y por internas, las privadas que no la son. Duval considera que las representaciones externas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los

sujetos capaces de interpretar este sistema de signos. Las representaciones externas tienen diferentes funciones: sirven para comunicar, para objetivar y pueden ser manipuladas. A partir de estas dos clasificaciones, Duval distingue tres tipos de representaciones (Duval 1995, pág. 27).

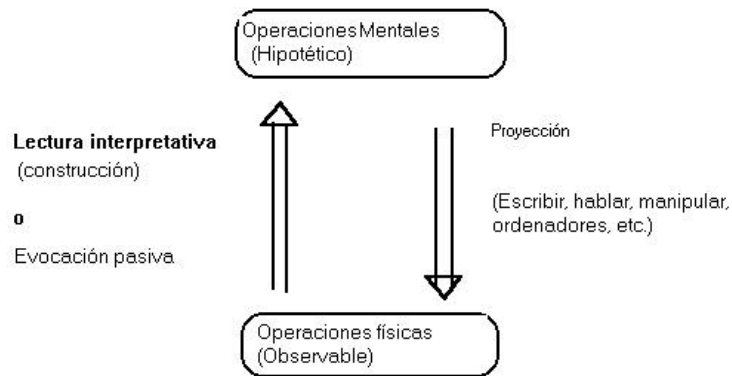
	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	mental función de objetivación	semiótica función de objetivación función de expresión función de tratamiento intencional
NO-CONSCIENTE	computacional función de tratamiento automático o casi-automático	

Figura 5

La distinción entre representaciones externas e internas tal como la formula Duval es aceptada tanto por los no-representacionistas como por los representacionistas. Lo que sitúa a Duval en el representacionismo no es, lógicamente, la clasificación externo/interno en el sentido de público o privado sino la aceptación del punto de vista de la psicología genética que considera que las representaciones mentales son la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos.

Si bien hay investigadores posicionados en el representacionismo que postulan una equivalencia entre representaciones externas e internas (Castro y Castro 1997), Duval se muestra crítico con la suposición que cada representación externa tiene un equivalente en forma de representación interna, ya que considera que esta relación es bastante más compleja. Para Duval, la hipótesis de una correspondencia directa entre las representaciones mentales y las semióticas implica la subordinación de éstas a aquéllas; es decir, supone que la noesis dirige la semiosis. Dos de las razones que da Duval para cuestionar esta hipótesis son: 1) el gran desfase que hay entre las representaciones mentales del sujeto y las representaciones semióticas que produce para expresar sus representaciones mentales y 2) Las representaciones semióticas, a diferencia de las mentales, presentan el grado de libertad necesario para todo tratamiento de la información, pudiendo expresar contenidos diferentes puesto que se sitúan en el plano de la expresión. No así las representaciones mentales que, al situarse en el plano del contenido, son de contenido único. Para Duval, la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos. Recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a las otras personas. Las representaciones externas juegan un doble papel: 1) actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y 2) expresan la red de significados personales de los sujetos que los usan. Duval remarca la existencia de diversos sistemas de representación ligados a un mismo objeto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene potencialidades y limitaciones, por lo que su utilización conjunta es esencial para producir diferentes sentidos o bien para escoger uno de ellos.

4.5 Los puntos de vista de Kaput y de Brown



Kaput (1987, 1991 y 1992) es uno de los autores cuyas investigaciones sobre los sistemas de representación cuestionan el punto de vista realista representacionalista. Kaput (1991) renuncia a lo que en este trabajo hemos llamado la versión fuerte de la representación y solamente considera la versión débil “(...) Considero la <<representación>> como la <<representación>> de una experiencia por otra(..)” (Kaput 1991, pág. 53). Este autor considera que la capacidad que tienen las personas para trabajar con objetos y procesos muy elaborados se basa en la interacción entre dos fuentes de organización de su mundo de experiencias: 1) las estructuras mentales con las que organiza su mundo de experiencias, y 2) su habilidad para utilizar medios materiales en la organización de sus experiencias. Kaput considera el mundo de experiencias de las personas dividido en dos esferas: 1) las experiencias materiales, que son observables y 2) las experiencias mentales, que son hipotéticas. Las dos actúan conjuntamente en los procesos de representación, tal como se ve en el diagrama siguiente (Kaput 1991, pág. 57). Figura 6

Kaput considera que el nivel inferior de este esquema es lo que normalmente se considera “significante” y el nivel superior “significado”. La flecha que apunta hacia arriba en esta figura corresponde a dos tipos de procesos: por una parte a la lectura activa y, por otra, a los procesos menos activos, menos controlados conscientemente, que comportan la evocación de fenómenos mentales a través de los materiales físicos. Con esta flecha se indica el uso de objetos materiales como base de la cognición. La flecha que apunta hacia abajo corresponde a la proyección de las estructuras mentales en el medio material para comunicar, manipular, demostrar, etc. En la parte inferior del diagrama tenemos los sistemas de notación ostensivos que Kaput entiende como un sistema de reglas para 1) identificar o crear signos, 2) para operar con ellos y 3) para determinar relaciones entre ellos (especialmente de equivalencia). Los ostensivos no tienen por qué ser cadenas de letras o dígitos, sino que pueden incluir gráficos y diagramas, o bien objetos físicos. Los tipos de acciones pueden variar según el tipo de sistema de notación considerado.

Las investigaciones de Brown (1996 y 1997) se basan en la fenomenología social de Schutz. Brown, siguiendo a Schutz, también considera la representación como una relación entre dos fenómenos que pueden ser materiales o mentales: <<En el presente contexto, me referiré a la noción primitiva de “signo” tal como la describe C.S. Peirce (...) la cual hace referencia a un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados. El signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales. Peirce considera la posibilidad que los fenómenos sean mentales o físicos. La noción de Schutz de “appresentation” desarrolla el punto de vista de Peirce para poder examinar la manera en que las personas asocian parejas de elementos.>> (Brown 1996, pág.

133). Schutz, siguiendo a Husserl y también a Peirce, distingue entre aquello que se presenta propiamente a la conciencia (appresenting) y aquello con lo que se relaciona (appresented), que muchas veces solo está presente simbólicamente. Para referirse a las situaciones en las que actúa el par “appresenting- appresented”, Schutz utiliza la expresión “appresentational situations”. Brown ha aplicado el punto de vista de Schutz a las “appresentational situations” matemáticas y considera cuatro esquemas para explicar cómo las personas relacionan las acciones con sus resultados: 1) El esquema “apperceptual”. Los objetos son vistos como objetos en sí mismos sin ninguna referencia. Por ejemplo, la expresión $x^2 + y^2 = 1$ es vista como un conjunto de letras sin ningún otro significado. 2) El esquema “appresentational” permite ver el mundo como un mundo de signos. Por ejemplo, la expresión $x^2 + y^2 = 1$ se considera como la representación de un círculo. 3) El esquema “referencial” comprende el conjunto de imágenes mentales relacionadas con la expresión $x^2 + y^2 = 1$. Este esquema permite las analogías y las metáforas y la expresión $x^2 + y^2 = 1$ es vista como un círculo. 4) El esquema “interpretacional” permite la relación entre el mundo de las apariencias superficiales y el que yo imagino que existe, que puede ser diferente del de otra persona. Por ejemplo, las imágenes mentales que los expertos relacionan con los símbolos algébricos son muy diferentes en el caso de los principiantes. En este ejemplo, el esquema interpretacional se puede considerar que comprende el conjunto de estrategias personales para relacionar las imágenes mentales con los símbolos algébricos observados.

Duval, según nuestra opinión, se mueve dentro del representacionalismo, mientras que Kaput y Brown lo hacen en el no-representacionalismo⁷. Si bien creemos que los puntos de vista de Duval, Kaput y Brown pueden ser diferentes en el nivel 1 de la tabla de la figura 3, los tres enfoques coinciden bastante en los niveles 2,3 y 4 de la tabla de la figura 3, ya que todos ellos se centran en la esfera de las experiencias materiales (nivel 2), en la de las experiencias mentales (niveles 3 y 4) y en la relación entre ambas esferas. Los tres consideran que las representaciones semióticas ostensivas (sistemas de notación en la terminología de Kaput y sistemas de signos en la de Brown) permiten: 1) expresar y comunicar (estructuras y operaciones mentales), 2) manipular (transformaciones de representaciones) y 3) objetivar (los sistemas semióticos independizan las producciones de los sujetos de los propios sujetos).

4.6 La teoría antropológica

Desde la teoría antropológica propuesta por Chevallard (1992) también se han realizado estudios sobre los sistemas de representación (Bosch 1994, Bosch y Chevallard 1999). La teoría antropológica toma como punto de partida un universo en el que todo es objeto. Las personas, las instituciones, las cosas materiales, los pensamientos de la persona, las nociones que se utilizan en una institución, etc. son objetos. Los objetos y las relaciones entre ellos emergen como resultado del trabajo humano (actividad). Las personas, instituciones, los otros objetos y las relaciones entre ellos existen porque hay trabajo humano. Los objetos (institución o persona) pueden crear con su actividad nuevos objetos, que se consideran existentes en el sentido que hay una relación entre la persona (o la institución) y el nuevo objeto. La existencia de los objetos no se considera de manera absoluta, sino como el resultado de la relación entre dos objetos.

Otra característica importante de la teoría antropológica es que considera de manera unitaria el

conjunto de existentes del universo que uno quiere estudiar, descartando a priori las distinciones y aproximaciones que nos sugiere la cultura. En particular, no se distingue los objetos matemáticos de los no matemáticos. Los objetos de una institución y las relaciones entre ellos emergen de un sistema de “prácticas” realizadas por los miembros de la institución. Las prácticas consisten en la utilización de una “técnica” que moviliza determinados objetos y puede hacer emerger otros nuevos. La palabra técnica se utiliza en la teoría antropológica como una “manera de hacer”. Dentro de una institución las “tareas” son aquellas actividades que los sujetos de la institución pueden y deben de hacer. Por lo tanto, la actividad dentro de una institución consiste en la realización de tareas que pueden estar articuladas en un sistema. A cada tarea le corresponde, como mínimo, una técnica, y al sistema de tareas un sistema de técnicas. Una técnica solamente puede vivir en una institución si hay un discurso (logos), llamado “tecnología”, que la justifica y la hace comprensible. La institución dedica una parte de su actividad a construir el marco tecnológico que permite controlar y justificar las técnicas institucionales. La existencia de una técnica en una institución está parcialmente condicionada por la existencia de una tecnología que la justifique y explique y, aún más, por la posibilidad de invocar una "teoría" que garantice la validez de la tecnología.

Según la teoría antropológica, la vida cotidiana de una institución es el resultado de su historia. La génesis institucional de un tipo de tareas y del sistema de trabajo (técnicas, tecnologías, teoría) no se puede disociar de las génesis personales correspondientes a los sujetos de la institución: para que emerja un sistema de trabajo es necesario que, simultáneamente, emerja para el sujeto el universo de objetos y de relaciones que la institución pretende hacer vivir. Los medios de la actividad matemática son un complejo de objetos determinados por las técnicas utilizadas en la resolución de tareas. Se dividen en dos categorías: la de los objetos ostensivos y la de los no-ostensivos. Se considera objeto ostensivo a todo objeto que pueda presentarse al sujeto humano como una realidad perceptible; no-ostensivos son los objetos que habitualmente llamamos “conceptos”, “nociones”, “ideas”, etc. Los no-ostensivos son ostensibles (pueden ser mostrados por ostensivos). La actividad humana (y también la matemática) requiere para su realización una pluralidad de registros ostensivos: el registro de la oralidad, el del trazo o del grafismo, el de la gestualidad y el de la materialidad (objetos ostensivos que no pertenecen a ninguna de las categorías anteriores). En la actividad humana, los complejos de objetos ostensivos activados se distribuyen siempre entre diferentes registros, sin que podamos, generalmente, ver funcionar ni tan siquiera uno de ellos de manera autónoma respecto de los otros. A los objetos no-ostensivos que viven en una institución se les asocia un conjunto más o menos preciso de objetos ostensivos, mediante los cuales pueden ser evocados o invocados (un nombre, cierto número de grafismos, de gestos, etc.). Del mismo modo, los objetos ostensivos también pueden tener un nombre, es decir, otro objeto ostensivo asociado que permite ciertas manipulaciones. De la misma manera que existen interrelaciones entre los objetos ostensivos y los no-ostensivos, también los objetos ostensivos están relacionados entre sí. La antropología cognitiva postula que en toda actividad humana hay una coactivación de objetos ostensivos y no-ostensivos, aunque considera difícil establecer en cada caso cuáles son los objetos no-ostensivos activados porque no existe ninguna asociación de objetos ostensivos y no-ostensivos que esté unívocamente determinada: el recurso a objetos no-ostensivos es necesario, pero el recurso a tal o cual objeto en particular no lo es. Solamente restringiéndonos a un conjunto muy pequeño de actividades en el seno de una institución en un periodo determinado, se puede encontrar en algunos casos un avance del sistema de instrumentos ostensivos sobre el sistema de no-ostensivos (falta un concepto); y en otros casos el fenómeno inverso, provocado por la

ausencia de ostensivos (falta una notación que permita un mejor rendimiento).

Decir que los objetos ostensivos permiten evocar o invocar ciertos objetos asociados -ya sean ostensivos o no-ostensivos-, es lo mismo que decir que funcionan como signos suyos, ya que permiten representarlos. Para la antropología cognitiva, los ostensivos actúan como instrumentos de la actividad y, por lo tanto, tienen una valencia instrumental. Los objetos ostensivos, además de valencia instrumental, la tienen también semiótica. Las posibles utilizaciones de un objeto ostensivo en actividades diferentes hacen que su valencia semiótica esté siempre abierta, pudiendo evocar o representar diferentes objetos, según el tipo de actividad que se considere. Al ser movilizado en una técnica concreta es cuando adquiere su semioticidad efectiva. Decir que los objetos ostensivos tienen valencia instrumental y valencia semiótica no supone que podamos fijarla a voluntad, ya que tienen una instrumentalidad y valencia semiótica localmente estabilizada (en la historia de las instituciones). En una institución donde las actividades que se realizan evolucionan muy rápidamente -como, por ejemplo, en una clase de matemáticas- se producen variaciones locales de la instrumentalidad y semioticidad de los instrumentos ostensivos a un ritmo acelerado. La antropología cognitiva considera que los ostensivos no tienen sentido (en contra de lo que habitualmente se considera) sino que producen sentido por medio de determinados usos. Los objetos ostensivos que forman un sistema están sometidos a ciertas reglas formales de uso que permiten articular ciertos objetos ostensivos entre ellos, realizar ciertas combinaciones y transformaciones posibles, etc. Estas reglas producen ciertas restricciones sintácticas (relaciones entre ostensivos no permitidas) y relaciones entre ostensivos que pueden ser utilizadas en un futuro, aunque actualmente no sean útiles. Además del nivel de sintaxis, hay que tener en cuenta el nivel semántico (los objetos no ostensivos que se asocian a los ostensivos manipulados) y el nivel pragmático (prácticas efectivas en las que se utiliza el sistema de ostensivos considerados).

La antropología cognitiva considera el pensamiento, en tanto que manipulación de símbolos mentales, como un caso particular de manipulación de ostensivos. Este punto de vista elimina los símbolos mentales al postular solamente dos categorías de objetos: los ostensivos y los no-ostensivos. Esto solamente se puede conseguir englobando en el término “ostensivo” tanto los objetos intersubjetivos (dominio de lo público) como los símbolos mentales (dominio de lo privado). <<A menos que en lugar de “decir” y “escribir” nos limitemos a “pensar” las palabras y escrituras anteriores, lo que consideraremos como otra forma de manipulación de objetos ostensivos>> (Bosch 1994, pág. 49). Conviene remarcar que con este punto de vista, el término “ostensivo” pasa de ser “fenómeno material” a ser “fenómeno mental”. En efecto, por “ostensivo” se entiende normalmente aquello que se puede mostrar, aquí y ahora, a otra persona, aquello intersubjetivo”. Es evidente que las palabras pensadas o las imágenes mentales de una persona no son ostensivas en este sentido. Ahora bien, ¿Qué tienen en común las palabras escritas en un libro o las palabras pensadas? Lo que tienen en común es que en los dos casos se presentan directamente (propriadamente) a la conciencia, en ambos casos son “fenómenos”. Ahora bien, mientras que los fenómenos materiales se pueden mostrar a otro directamente, los mentales han de pasar previamente por los materiales para poder ser mostrados a otro, solamente se pueden mostrar indirectamente (impropiamente).

4.7 La dimensión pragmática-semiótica de la representación.

El punto de vista referencial sobre la representación se puede formular así: "algo" representa

"algo". Desde este punto de vista un signo matemático representa un objeto matemático. Este punto de vista relega al usuario de las matemáticas y las contempla como "conocimiento sin sujeto cognoscente" ya que lo que interesa son los productos de la actividad matemática y no las prácticas de los matemáticos. Los estudios sobre la actividad matemática de tipo naturalista (Kitcher 1983; Kitcher y Aspray 1988) y los histórico-sociales (Wittgenstein 1978; Ernest 1998; Restivo 1992, etc.) desarrollados en los últimos años han desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática entendida como una práctica social en un doble sentido: por un lado, en cuanto es aprendida de otras personas, y por otro, porque está formada por reglas que se siguen habitualmente.

Los estudios naturalistas y los histórico-sociales sobre las matemáticas han puesto de manifiesto que la significación no se agota en el plano semántico ya que hay que considerar al usuario. La contemplación del usuario conlleva la dimensión pragmática de la representación. Los orígenes de esta dimensión pragmática se pueden encontrar en la semiótica de Peirce, la cual estudia la relación entre un interpretante y los signos en el marco de una teoría comprensiva de éstos. El punto de vista pragmático se puede formular así: "algo" representa "algo" para "alguien". Esto nos lleva a la dimensión intencional de la representación, ya que la producción o la interpretación de un signo como representante de un objeto se realiza por medio de un interpretante. El estudio del componente intencional requiere la introducción del sujeto como término irreducible de significación. Desde esta perspectiva, el significado no es inherente al objeto sino que se construye en el proceso de interpretación de manera no arbitraria ya que está vehiculado por la intersubjetividad. El hecho de considerar al interpretante permite postular una teoría de la significación de los objetos matemáticos compatible con la máxima pragmática de Peirce para captar el significado de las ideas que utilizamos: "*consideremos los efectos prácticos que creemos que podrían producirse por el objeto de nuestra concepción. La concepción de todos los efectos es la concepción completa del objeto (CP, 5.402)*". (citado en Ibarra y Mormann, 1997, pág 277).

La manera pragmática de entender el significado se encuentra en la base de la teoría de los "objetos personales e institucionales" formulada por Godino y Batanero (1994) y desarrollada en Font (2000). Estos autores consideran tres niveles de significado: 1) Significado personal de un objeto matemático. Es el sistema de prácticas personales que realiza una persona para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto personal, 2) Significado institucional de un objeto matemático. Es el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas del cual ha emergido el contenido institucional y 3) Significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar. Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en la institución escolar como adecuadas y características para resolver estos problemas.

Esta manera de entender el significado se basa en la suposición que los sistemas matemáticos de signos ostensivos que se manipulan en el aula adquieren significado para los alumnos al ser usados en el aula. Desde este punto de vista, diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona. Dicho de otra manera: optar por

una visión pragmática del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en segundo plano el interés por los procesos mentales de las personas (que como mucho se pueden considerar prácticas privadas). El punto de vista pragmático, llevado al extremo, puede implicar situarse en el anticognitismo y nos puede llevar a dejar de lado todas las aportaciones que ha hecho la psicología cognitiva. Conviene remarcar que éste no es el caso de la teoría de los objetos personales e institucionales ya que en esta teoría se tiene en cuenta las aportaciones que ha hecho la psicología cognitiva sobre los procesos mentales.

De entrada puede parecer que el punto de vista pragmático sobre el significado no es el adecuado en matemáticas. Así lo cree Bunge: *"Aun así, todas las interpretaciones pragmáticas de los símbolos matemáticos son adventicias, pues el objeto de la matemática es abstraer de utilizadores y circunstancias a fin de lograr a la par la universalidad y la libertad respecto de su compromiso con los hechos"* (Bunge 1973, pág. 71 de la edición usada). Bunge pone el siguiente ejemplo para ilustrar las interpretaciones pragmáticas en matemáticas: *Una interpretación estricta de la expresión " z^* ", donde z designa un número complejo, es ésta: " z^* " significa la parte real de z . (Esta regla de designación podría ser reemplazada por una definición). En contraste, una interpretación pragmática del mismo símbolo es ésta: "Todo el que se enfrenta con el símbolo " z^* " debe invertir el signo de la parte imaginaria de z ". Una segunda interpretación pragmática de " z^* " se da bajo la forma de regla o prescripción: "Para computar z^* a partir de z , inviértase el signo de la parte imaginaria de z ". Una tercera lectura pragmática del mismo símbolo sería una instrucción capaz de ser puesta en su computador de suerte tal que posibilite el manejo del símbolo. Toda interpretación pragmática de un símbolo lógico o matemático puede concebirse como una instrucción para el manejo (v.g. cómputo) del símbolo de modo efectivo."* (Bunge, págs. 71-72). Bunge, en su crítica a las interpretaciones pragmáticas de los sistemas de signos matemáticos, hace algunas observaciones muy interesantes sobre las condiciones para que la interpretación matemática de un signo sea válida.

Tal como hace observar Bunge, dado un símbolo matemático, se pueden esperar diversas interpretaciones pragmáticas según el utilizador, las circunstancias y las metas. Por lo tanto, sólo un subconjunto de las interpretaciones pragmáticas será válido, por lo que se necesita un criterio de validez. Si consideramos, tal como propone la teoría de los objetos personales e institucionales, que el significado personal de un objeto matemático es el sistema de prácticas personales que realiza un alumno para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto personal, el criterio de validez es muy fácil de encontrar, ya que lo aporta el profesor. Es decir, el profesorado determina cuáles son las prácticas válidas y corrige las que no lo son. Este criterio de validez se ha formulado en la teoría de los objetos personales e institucionales mediante el constructo "significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar". Ahora bien, el profesorado (institución) no utiliza cualquier criterio para determinar si una práctica es válida o no lo es, sino que lo hace a partir de una "teoría". Por lo tanto, la interpretación pragmática del significado choca con el problema de "la objetividad de la teoría" que se utiliza como criterio de validez. Si no se puede explicar desde un punto de vista pragmático "la objetividad de la teoría", la interpretación pragmática del significado resulta ser muy limitada. En la teoría de los objetos personales e institucionales se resuelve el problema de la objetividad de la teoría por medio del constructo "significado institucional". Ahora bien, para llegar a aceptar un constructo de este tipo, es necesario dar una justificación muy argumentada, ya que la filosofía, y más en concreto la filosofía de la ciencia, ha necesitado hacer un largo recorrido para llegar a formulaciones de este tipo.

La explicación desde un punto de vista pragmático de “la objetividad de la teoría” es un tema complejo porque la objetividad (certeza o verdad necesaria) es un objetivo que las ciencias pretenden conseguir haciendo abstracción de los utilizadores. La aceptación de la explicación pragmática de “la objetividad de la teoría” sólo es posible si previamente se ha puesto entre paréntesis como mínimo: 1) la suposición que la ciencia nos ofrece copias cada vez mejores de una realidad que tiene sus propias determinaciones, 2) la teoría referencial del significado y 3) la suposición que la actividad constitutiva del sujeto lleva a verdades necesarias. El cuestionamiento de estas tres suposiciones es el resultado de un largo proceso que ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia desde el estudio de las teorías al análisis de las prácticas.

Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división entre el "contexto de justificación" y "el contexto de descubrimiento" propuesta por el positivismo lógico. El contexto de justificación tenía que ver con los criterios metodológicos normativos subyacentes a la ciencia y, consiguientemente, podía ser objeto de análisis "a priori" en el que se involucraba genuinamente el estudio metacientífico, mientras que los procesos de descubrimiento debían ser objeto de los estudios de historiadores, sociólogos y psicólogos de la ciencia, en tanto que interesados en la descripción "a posteriori" de aspectos diversos vinculados a la actividad científica. Ambos centros de interés eran, por lo demás, estancos. En la superación de esta división han tenido un papel destacado el libro de Kuhn "La estructura de las revoluciones científicas" (Kuhn 1962) y el artículo de Quine "Naturalización de la epistemología" (Quine 1969). El primero, que se puede considerar una de las bases del punto de vista llamado "socio-histórico" atrajo la atención de los filósofos de la ciencia sobre el desarrollo histórico de las teorías científicas, mientras que el segundo, que está en la base de lo que se ha venido en llamar "naturalismo" en la filosofía de la ciencia, postula que no es posible disponer en filosofía de ninguna posición ventajosa desde la que puedan realizarse hallazgos "a priori".

La teoría de los objetos personales e institucionales se ha ampliado últimamente con una teoría de funciones semióticas. Godino y Recio (1998) consideran que las entidades primarias en matemáticas pueden ser de tipo notacional, intensional o extensional y se presentan en la interacción del aula en forma ostensiva. Cada una de estas entidades puede jugar el papel de expresión o de contenido en una función semiótica: <<(. . .) vamos a esbozar un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades básicas: “Fenomenologías”, considerando como tales las situaciones-problemas, aplicaciones, tareas, en general, las “entidades extensionales” que inducen actividades matemáticas. “Notaciones”, esto es todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas, etc., en general, “entidades notacionales”. “Generalizaciones”, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías, esto es “entidades intensionales”). En el trabajo matemático, tanto las generalizaciones como las situaciones-problemas vienen dados por sistemas notacionales que describen sus propiedades características. Ambas entidades son inseparables de los ostensivos que les dan corporeidad, pero no identificables con ellos, esto es, consideramos que la matemática no es reducible al discurso que la expresa>> (Godino y Recio 1998, pág. 3-3).

Para Godino y Recio, los tres tipos de entidades primarias consideradas (extensionales, intensionales y notacionales) pueden jugar el papel de expresión y contenido en las funciones

semióticas, resultando, por lo tanto nueve tipos diferentes de tales funciones. A continuación las ilustraremos con ejemplos muy simples. Si veo la palabra triángulo y la relaciono con el dibujo de un triángulo, se trata de una función semiótica con expresión notacional y contenido extensional. Si veo la palabra triángulo y la relaciono con “figura plana cerrada por tres lados”, estoy considerando una función semiótica con una expresión notacional y un contenido intensional. Si veo la palabra triángulo y la relaciono con “ABC”, tengo una función semiótica con expresión notacional y contenido notacional. Si leo “figura plana cerrada por tres lados” y lo relaciono con la palabra triángulo, se trata de una función semiótica con una expresión intensional y un contenido notacional. Si leo “figura plana cerrada por tres lados” y lo relaciono con el dibujo de un triángulo, estoy considerando una función semiótica con una expresión intensional y un contenido extensional. Si leo “figura plana cerrada por tres lados con un ángulo recto” y lo relaciono con “figura que se obtiene al dividir un rectángulo por una diagonal”, tengo una función semiótica con expresión intensional y contenido intensional. Si veo un triángulo y lo relaciono con “esta figura es un triángulo”, se trata de una función semiótica con una expresión extensional y un contenido intensional. Si veo un triángulo y lo relaciono con el dibujo de otro triángulo, tengo una función semiótica con una expresión extensional y un contenido extensional. Si veo un triángulo de vértices A, B y C y lo relaciono con “ABC”, se trata de una función semiótica con una expresión extensional y un contenido notacional.

Los ejemplos anteriores son muy simples, pero la producción e interpretación de signos en matemáticas es un proceso muy complejo, ya que cuando vemos, por ejemplo, $f(x)$ no solamente interpretamos esta notación como una función sino que esta notación, entre otros procesos, nos lleva a considerar la variable independiente que se representa por x . Esta focalización en la variable independiente se puede representar de la manera siguiente:

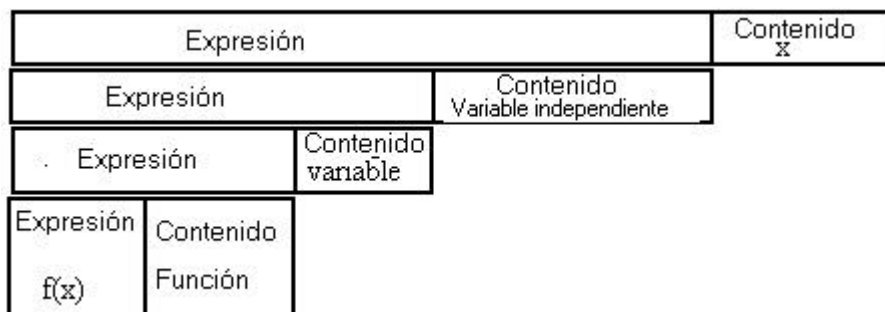
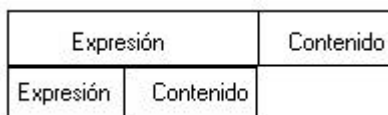


Figura 7

Una expresión $f(x)$ se relaciona con expresión que se relaciona con el cc expresión que se relaciona con expresión/contenido es la expresión considerar la función que relaciona la expresión inicial “ $f(x)$ ” con el contenido final “ x ”. Esta función relaciona un objeto $f(x)$ con el objeto x , es decir, relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase. Este esquema sigue la estructura propuesta por Hjelmslev “*Semejante superelevación de códigos representa lo que Hjelmslev ha definido como “semiótica connotativa”, cuya forma es:* Figura 8



ar expresión/contenido es la ar expresión/contenido es la pendiente”; este nuevo par rido notacional x . Podemos

Es connotativa una semiótica en que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica. En otros términos, existe código connotativo cuando el plano de la expresión es otro código. En el ejemplo ofrecido más arriba, el contenido de la primera significación (junto con las unidades expresivas que lo transmiten) se convierte en expresión de un contenido ulterior” (Eco 1976, pág. 94 de la edición usada). En Font (2000) se ha aplicado las funciones semióticas a un objeto matemático de una cierta complejidad como es la derivada.

La clasificación de las entidades matemáticas en extensionales, intensionales y notacionales se puede aplicar tanto a las representaciones ostensivas (dominio de lo público) como a las mentales (dominio de lo privado). Es decir, podemos considerar símbolos mentales que actúan como soporte de entidades extensionales, notacionales o intensionales, o bien considerar ostensivos que actúan como soporte de entidades extensionales, notacionales o intensionales. Por este motivo las funciones semióticas son un instrumento que permite el análisis conjunto de la manipulación de ostensivos materiales en un contexto social y del pensamiento que la acompaña.

5 SÍNTESIS Y REFLEXIONES FINALES

1) La clasificación de las representaciones en externas e internas se puede considerar en dos sentidos diferentes. El primero, que es poco problemático, consiste en considerar como representación externa aquello que es visible y público, mientras que las representaciones que no son accesibles a las otras personas se consideran internas. El segundo sentido, que tiene una carga ontológica muy fuerte, consiste en considerar que los objetos exteriores tienen una copia especular en la mente de las personas.

2) Consideramos que toda experiencia está cargada de teoría y que los conceptos que la forman se presentan en un contexto intersubjetivo de forma ostensiva. No podemos hablar, por ejemplo, de la derivada sin utilizar representaciones ostensivas ni podemos interpretar el ostensivo $f'(a)$ sin el concepto de derivada en un punto. Dicho de otra manera: todo acto de conocimiento intersubjetivo, moviliza un conjunto de ostensivos y de no-ostensivos. Esto no implica, no obstante, que no podamos distinguir el caso particular del caso general si nos situamos en un juego del lenguaje en el que, cuando se dice que el ostensivo " $f'(a)$ " es muy pequeño se entiende que nos interesa el aspecto individual, prescindiendo del general, mientras que cuando se habla de la derivada en un punto utilizando el ostensivo " $f'(a)$ " prescindimos del aspecto particular y nos centramos en el aspecto general. Desde esta perspectiva, consideramos que la manera de entender la abstracción, la generalización y la simbolización que propone Dubinsky o la que propone Dörfler, informan sobre las reglas del "juego de lenguaje" que permite prescindir de lo particular y centrarse en lo general.

3) En las prácticas públicas se manipulan dos clases de objetos: ostensivos y no-ostensivos. Estos objetos se pueden clasificar en: intensionales, notacionales y extensionales, cada uno de los cuales puede jugar el papel de expresión y de contenido en las funciones semióticas.

4) Consideramos que, en la situación en la que se encuentra actualmente la didáctica de las matemáticas, puede ser más rico para esta disciplina tratar “la manipulación de símbolos mentales” como una esfera con una cierta autonomía respecto de la “manipulación de

ostensivos materiales". Una esfera, por cierto, sobre la cual la psicología cognitiva ha realizado aportaciones importantes. Ahora bien, aceptar que en estos momentos puede ser útil tratar la manipulación de símbolos mentales como una esfera autónoma respecto de la "manipulación de ostensivos materiales" no quiere decir situarnos en el otro extremo: considerar que el pensamiento, entendido como proceso de manipulación de símbolos mentales que tienen lugar en la mente, es la causa de la "manipulación de ostensivos materiales". Aceptar esta última posición implica que la "noesis" dirige a la "semiosis" (en la terminología de Duval, 1995). Lo que proponemos es: 1) Considerar que la "manipulación de ostensivos materiales" se realiza en un contexto social de interacción y va acompañada de "pensamientos en los que se manipulan símbolos mentales" (y no necesariamente es causada de manera mecánica) y 2) Explorar la posibilidad que las funciones semióticas sean un instrumento que permita el análisis conjunto de la "manipulación de ostensivos materiales" en un contexto social y del "pensamiento" que lo acompaña. 5) Desde un punto de vista pragmático, el conjunto de prácticas que puede realizar en un momento determinado el alumno es lo que se entiende por significado del objeto (concepto, idea, no-ostensivo, etc.) personal del alumno en este momento. El significado entendido de esta manera se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Un cambio de notación puede activar un sentido diferente, es decir un subconjunto de prácticas públicas y privadas, que puede facilitar o dificultar la resolución de la actividad. En la producción de nuevo sentido también juegan un papel importante los procesos analógicos y metafóricos.

6) Generalmente los objetos matemáticos se representan mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos. Cada una de las notaciones ayuda a producir sentido, pero no produce todos los sentidos. Por lo tanto, comprender un objeto matemático requiere utilizar diferentes notaciones y convertir (traducir) una representación en otra.

7) Consideramos que las tres clasificaciones básicas para entender los procesos de representación son: Ostensivo versus no-ostensivo

Esta distinción se ha de tomar en sentido intersubjetivo: se puede mostrar a otro directamente versus no se puede mostrar directamente, solamente por medio de ostensivos.

Las palabras pensadas o los recuerdos (símbolos mentales) se presentan propiamente a la conciencia pero no son ostensivos. Esto nos lleva a la distinción: Propiamente versus Impropiamente

Esta distinción se ha de tomar en el sentido siguiente: se presenta directamente a la conciencia (propiamente) versus se presenta indirectamente a la conciencia (impropiamente). Los signos matemáticos (ostensivos o pensados) se presentan propiamente. Los objetos matemáticos sólo se presentan impropiamente. La otra distinción básica es: Extensivo versus Intensivo (Ejemplar / Tipo) Estas tres clasificaciones actúan cuando, por ejemplo, en un libro vemos $f(x)$. Por un lado es ostensivo y se presenta propiamente a la conciencia. Por otro lado, según el juego de lenguaje que consideremos, se puede considerar como un ejemplo de función (extensivo) o bien como la clase de funciones (intensivo) o bien como un signo (propiamente) que está en el lugar de "algo" (la clase de funciones, o la función particular) que está presente impropiamente.

Notas finales

1 Por “trascendente” entendemos que permanece fuera de toda experiencia posible, entendida ésta en sentido kantiano, como aquella que queda más allá del espacio y del tiempo. Es decir, la “cosa en sí” que ultrapasa los límites del conocimiento humano. Por “inmanente” entendemos aquello que cae dentro de los límites de la experiencia posible.

2 El "Tractatus" y "Las Investigaciones" son las primeras obras de Wittgenstein que fueron publicadas. Dadas las marcadas diferencias de estilo y contenido que hay entre ellas, se fue extendiendo la idea que Wittgenstein había desarrollado dos filosofías diferentes: la del primer Wittgenstein y la del segundo. La publicación póstuma de las obras escritas en los años 30 muestra, según Kenny (1973), que esta visión es demasiado simple, ya que hay muchas conexiones entre estas dos obras, así como muchos supuestos comunes. A pesar de ser conscientes de la simplicidad de la idea del primer y segundo Wittgenstein, la continuaremos utilizando.

3 Utilizamos el término "ostensivo" en el sentido que se puede mostrar a otro directamente. Por ejemplo, la fórmula de una función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente.

4 De hecho, se puede considerar la existencia de dos tradiciones cognitivas diferentes. Una, la dominante, de naturaleza mecanicista y asociacionista, representada actualmente por el “procesamiento de la información”, que considera que las representaciones son homeomórficas a la realidad. Y otra, más constructivista, que tiene sus orígenes en la psicología europea (Piaget, Vygostky, la Gestalt,...) que pone en cuestión la representación como correspondencia homeomórfica porque considera que la mente humana juega un papel muy activo en la construcción de estas representaciones y, en algunos casos, llega a cuestionar la versión fuerte de la representación (Varela 1990).

5 Utilizamos el término corporeidad porque, al no poderse mostrar a otros, no son ostensivos. Ahora bien, con el término corporeidad queremos indicar que estos símbolos mentales son contenidos propios de la conciencia que son casi-ostensivos (palabras pensadas, evocación de experiencias vividas, imágenes mentales, etc.).

6 *"(...) Según esta idea, el hombre y el computador son sistemas de procesamiento de propósitos generales, funcionalmente equivalentes, que intercambian información con su entorno mediante la manipulación de símbolos. Según esta concepción, tanto el ser humano como el computador son verdaderos "informívoros"(...), son sistemas cognitivos cuyo alimento es la información; y aquí la información tiene un significado matemático muy preciso de reducción de la incertidumbre"* (Pozo 1993, pág. 43).

7 La interpretación de Duval como realista representacionalista y la de Kaput y Brown como no representacionalistas es personal y puede ser controvertida.

Bibliografía

- ANDERSON, J.R.: (1983). Argumentos acerca de las representaciones mediante la capacidad para formar imágenes mentales, en Sebastián M.V. (comp): *Lecturas de psicología de la memoria* (pp. 385-425). Madrid: Alianza Universidad.
- AZCÁRATE, C.: (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- AZCÁRATE, C.: (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de alumnos de 2º de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon*, 24, 9-22.
- AZCÁRATE, C.: (1995). Sistemas de representación. *Uno*, 4, 53-61.
- AZCÁRATE, C.: (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?. *Suma*, 25, 23-30.
- BERGER, P.; LUCKMANN, T.: (1966). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu, 1993 (ed. usada) BISHOP, A. J. : (1996) Implicacions didàctiques de les recerques sobre visualització. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11, 2 , 7-18.
- BOSCH, M.: (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.: (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Object d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 1, 77-124.
- BREIDENBACH, D.; DUBINSKY, E.; HAWKS, J.; NICHOLS, D.: (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.
- BROWN, T.: (1996). The phenomenology of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 115-150.
- BROWN, T.: (1997). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer A.P BUNGE, M.: (1973). *Filosofía de la Física*. Barcelona: Ariel, 1982 (ed. usada).
- CASTRO, E.; CASTRO, E.: (1997). Representaciones y modelización, en L. Rico (Coord): *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE UB/HORSORI.
- CHEVALLARD, Y.: (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 12, 1, 73-112.
- COLL, C.: (1983). La construcción de esquemas de conocimiento en el proceso de enseñanza/aprendizaje, en C. Coll (Comp.): *Psicología genética y aprendizajes escolares* (pp. 183-205). Madrid: Siglo XXI. COLL, C.: (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*. Barcelona: Departament d'Ensenyament de la Generalitat

DAVIS, P. J.: (1993). Visual theorems, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 4, 333-344.

DELGADO, C.; AZCÁRATE, C.: (1996) Study of the evolution of graduated student's concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol II, pp. 289-296.

DELGADO, C.: (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

DÖRFLER, W.: (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics, en Bishop A.J. Mellin-Olsen S., Van Dormolen, J. (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

DREYFUS, T.: (1994). Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en C. Gaulin y otros (eds.): *ICME 7 (1992) . Selected Lectures* (pp. 107-123). Québec: Les Presses de l'Université Laval.

DUBINSKY, E.: (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.

DUBINSKY, E.: (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8, 3, 24-41.

DUVAL, R.: (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang S.A.

ECO, U.: (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1995 (ed. usada)

ERNEST, P.: (1998) Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, en C. Alsina y otros (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pp. 153-171). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

FISCHBEIN, E.: (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 2, 139-162.

FONT, V.: (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

GODINO, J D.; BATANERO, C.: (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M.: (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En: A. Olivier i K. Newstead (eds.): *Proceedings of the 22nd PME Conference*, (Vol 3, pp. 3-1 a 3-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.

GORGORIÓ, N.; JONES, K.: (1997). Cabri i visualització. *Biaix*, 10, 21-23.

- GRAY, E.M.; TALL, D.: (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 1, 116-140.
- GUZMÁN, M.: (1996) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.
- HABERMAS, J.: (1981) *Teoría de la acción comunicativa*. Madrid: Taurus, 1999 (ed. usada).
- HUSSERL, E.: (1954). *La crisis de las ciencias europeas y la fenomenología trascendental*. Barcelona: Crítica, 1991 (ed. usada).
- IBARRA, A.; MORMANN, T.: (1997) *Representaciones en la ciencia. De la invariancia estructural a la significatividad pragmática*. Barcelona, Ediciones del bronce.
- JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum A.P.
- JOHNSON-LAIRD, P.N.: (1987). Modelos mentales en ciencia cognitiva, en D. A. Norman (compl): *Perspectivas de la ciencia cognitiva* (pp 179-231).Barcelona: Paidós.
- KAPUT, J.: (1987). Toward A Theory of Symbol Use in Mathematics, en Janvier C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale N.J.: Erlbaum A.P.
- KAPUT, J.: (1991). Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes, en E. Von Glasersfeld (ed.): *Radical constructivism in mathematics education* (pp 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.
- KAPUT, J.: (1992). Technology and mathematics education, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan P.C.
- KENNY, A.: (1973). *Wittgenstein*. Madrid: Alianza Universidad, 1982 (ed. usada)
- KITCHER, P.: (1983). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
- KITCHER, P.; ASPRAY, W.(eds). (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- KUHN, T. S.: (1962). *La estructura de las Revoluciones Científicas*. Madrid: Fondo de Cultura Económica, 1981 (ed. usada)
- LAKATOS, I.: (1976) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad, 1978 (ed. usada)

- MIRAS, M: (1993). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos. En: C. Coll, E. Marin, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, A. Zabala (eds.). *El constructivismo en el aula* (pp. 47-63). Barcelona: Graó.
- MORENO, M.; AZCÁRATE, C.:(1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las ciencias*, 15, 1, 21-34.
- OGDEN, C. K.; RICHARDS, I. A.: (1923). *El significado del significado*. Buenos Aires: Paidós, 1984 (ed. usada).
- POPPER, K.R.: (1972). *Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos, 1988 (ed. usada)
- POZO, J.I.: (1993). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- PRESMEG, N.C.: (1986) Visualization in high-school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6, 42-46.
- PRESMEG, N.C.: (1999). Possibilitats i paranys del pensament en imatges en la resolució de problemes matemàtics. *Biaix*, 14, 21-27.
- PUIG, L.: (1997). Análisis fenomenológico, en L. Rico (Coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE UB/HORSORI.
- PYLYSHYN, Z. W.: (1983). La naturaleza simbólica de las representaciones mentales, en Sebastián M.V. (comp): *Lecturas de psicología de la memoria* (pp. 367-384). Madrid: Alianza Universidad.
- QUINE, W.V.O.:(1969). *Ontological Relativity and Other Essays*, Nueva York, Columbia University Press.
- RESTIVO, S.: (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- ROMERO, I.; RICO, L.: (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *EMA*, 4, 2, 117-151.
- ROMERO, C.: (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las ciencias*, 14,1, 3-14.
- SAUSSURE, F.: (1916). *Curs de lingüística general*. Barcelona, Edicions 62, 1990 (ed. usada).
- SCHUTZ, A.: (1932). *La construcción significativa del mundo social: introducción a la sociología comprensiva*. Barcelona: Paidós, 1993 (ed. usada).
- SFARD, A.: (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36

TALL, D.; VINNER, S.: (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 2, 151-169.

TALL, D.: (1996). Functions and Calculus, en A.J. Bishop y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer A.P.

TALL, D.: (1998). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities, en C.Alsina y otros (eds.): *ICME 8 (1996) . Proceedings* (pp. 65-82). Sevilla: S.A.E.M.

THALES VARELA, F.J.: (1990). *Conocer*. Barcelona: Gedisa

VERGNAUD, G.: (1990) . Epistemology and psychology of mathematics education, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (ed.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

VIGGIANI-BICUDO, M. A.: (1998). Philosophy of Mathematical Education: a phenomenological approach, en C.Alsina y otros (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pp. 463-485). Sevilla, S.A.E.M. THALES.

VINNER, S.: (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer A. P.

WITTGENSTEIN, L.: (1953). *Investigaciones Filosóficas*. Barcelona: Laia, 1983 (ed. usada).

WITTGENSTEIN, L.: (1978). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1987 (ed. usada).

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S.: (eds.): (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Notes 19. Washington DC: MAA.